

Title	函数不等式 $f(x, y) \leq g(x) + h(y)$ に就いて
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 97 p.7-p.12
Issue Date	1936-07-10
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74364
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

439. 函数不等式 $f(x, y) \leq g(x) + h(y) =$ 就イテ

角 谷 静 夫 (阪大)

$f(x, y)$ が空間 $R_1 \times R_2$ 上 define サレタ *real, non-negative one-valued function* ナルトキ、
夫々 R_1 及び R_2 上 define サレタ *real non-negative one-valued functions* $g(x)$ 及び $h(y)$ ヲ適當ニエラ
ンデ

$$f(x, y) \leq g(x) + h(y)$$

が成立スルヨウニ出來ルカ ドウカ、ト云フ問題ヲ考ヘル。コ
レハ *quasi-metric space* が他ノ *metric space* へ
"einbetten" デキルカ ドウカ ト云フ問題ニ關シテ起ツ
タ。

先ヅ $R_1 = R_2$ ナルトキハ $f(x, y)$ が *symmetric* ナ
アリ、 $g = h$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。何者、
モシサウデナケレバ

$$f_1(x, y) = f(x, y) + f(y, x)$$

$$g_1(x) = g(x) + h(x)$$

ト置ケバヨイ。

$R_1 (= R_2)$ が可~~無限~~個ノ点ヨリ成ツテキル時ハ *majora-*
tion ハ明カニ可能デアレ。

$$R_1 = (x_1, x_2, \dots)$$

デアレバ

$$g(x_n) = \max(f(x_1, x_n), f(x_2, x_n), \dots, f(x_n, x_n))$$

トオケバヨイ。スレト $m \leq n$ ナラバ

$$f(x_m, x_n) = f(x_n, x_m) \leq g(x_n) \leq g(x_m) + g(x_n)$$

デアール。

シカシ、*majoration* ハ一般ニハ必ずしも可能デナイ。

※ $R = \text{set of all real numbers} = \text{majoration}$ が不可能ナ例ヲ掲ゲル。

$$f(x, y) = \frac{1}{|x-y|} \quad x \neq y$$

$$= 0 \quad x = y$$

トオケバ $f(x, y)$ ハ全平面上ニテ定義サレタ *symmetric* ナ函数デアール。

コノ $f(x, y)$ が *immajorable* ナコトヲ示サウ。
今若シ

$$f(x, y) \leq g(x) + h(y) \quad (A)$$

トナル如キ *real, non-negative, one-valued functions* $g(x), h(y)$ ガアツタトセヨ。

$g(x) = h(x)$ ト考ヘテ差支ヘナイ。何者、モシサウデナケレバ

$$g_1(x) = g(x) + h(x)$$

トオケバヨイカラ。故ニ

$$f(x, y) \leq g(x) + g(y) \quad (B)$$

ガ成立スルト假定シテ矛盾ガオコルコトヲ示セバヨイ。

今

$$E_n = E_{(x,y)} [f(x,y) < n]$$

$$E_n^* = E_{(x)} [g(x) < n]$$

トスレバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n^* = R, \quad (2)$$

ニテ (1) が成立スルコトヨリ

$$E_n^* \times E_n^* \subseteq E_{2n} \quad (3)$$

デアイル。但シ、 $E_1 \times E_2$ ハ $x \in E_1, y \in E_2$ ナル pair (x, y) ノ表ハス点ノ集合トス。

トコロガ一方、 $f(x, y)$ ノ定義ヨリ

$$0 < |x - x_0| < \frac{1}{2n} \text{ ナルトキハ } f(x, x_0) > 2n \text{ デアイルカラ} \\ (x, x_0) \notin E_{2n}$$

故ニ (3) ヨリ、若シ $x_0 \in E_n^*$ ナラバ $0 < |x - x_0| < \frac{1}{2n}$ ナル x = 對シテハ $x \notin E_n^*$ デアイル。

即チ、 E_n^* ハ x_0 ノ含メバ x_0 ノ $\frac{1}{2n}$ - 近傍ノ点ハ x_0 以外ニ一ツモ含マナイ。依ッテ E_n^* ハ孤立点集合デアイル。コレハ (2) = 矛盾スル。何者、 E_n^* ハ孤立点ノミヨリナツテキルカラ可附番集合デ、ソノ可附番個ノ和モ可附番集合デナケレバナラナイカラ。

一般ノ $R_1 \times R_2$ デ define サレタ function $f(x, y)$

ノ majoration ノ問題ニ對シテハ次ノ定理カ成立スル。

定理: $R_1 \times R_2$ ニテ define サレタ real non-negative

one-valued function $f(x, y)$ が上記ノ如ク majorable デアルタメニ必要且ツ十分ノ條件ハ

$$\overline{E}_n = E_{(x,y)} [f(x, y) \geq n], \quad n=1, 2, \dots \quad (4)$$

トオイタトキ、 \overline{E}_n が二ツノ (必ズシニ disjoint デナクテモイ) 集合 E'_n ト E''_n トノ和ニワカレ

$$\overline{E} = E'_n + E''_n \quad (5)$$

コノ各々ハ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{proj } x (E'_n) = 0 \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{proj } y (E''_n) = 0 \quad (7)$$

ヲ満足スルコトデアール。

証明:

1° 必要ナルコト。(A) が成立スルトセヨ。

$$X_n = E_x \left[g(x) \geq \frac{n}{2} \right]$$

$$Y_n = E_y \left[h(y) \geq \frac{n}{2} \right]$$

トオケバ明カニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$$

デアール。又、(A) が成立スルカラ

$$\overline{E}_n \subset X_n \times R_2 + R_1 \times Y_n$$

デアール。何者: $(x, y) \in \overline{E}_n$ ナラバ $f(x, y) \geq n$ デアルカ

ラ、(A) ヨリ $g(x) \geq \frac{n}{2}$ カ又ハ $h(y) \geq \frac{n}{2}$ が成立シナケレ

バナラナイ。

即チ、前者ノ時ハ $x \in X_n \ni (x, y) \in X_n \times R_2$, 後者
ノトキハ $y \in Y_n \ni (x, y) \in R_1 \times Y_n$ 。

故ニ

$$E'_n = \overline{E}_n \cdot (X_n \times R_2)$$

$$E''_n = \overline{E}_n \cdot (R_1 \times Y_n)$$

トオケバ

$$\overline{E}_n = E'_n + E''_n$$

ニテ

$$\text{proj}_x(E'_n) \subseteq X_n$$

$$\text{proj}_y(E''_n) \subseteq Y_n$$

故ニ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{proj}_x(E'_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{proj}_y(E''_n) = 0$$

2° トオケタルコト。(5), (6), (7) が成立スルトセヨ。

各々, $x \in R_1, y \in R_2$ = 對シテ

$$x \in \text{proj}_x(E'_{n(x)-1}); \quad x \in \text{proj}_x(E'_n)$$

for $n \geq n(x)$

$$y \in \text{proj}_y(E''_{n(y)-1}); \quad y \in \text{proj}_y(E''_n)$$

for $n \geq n(y)$

ナル $n(x), n(y)$ が對應スル。($E'_0 = E''_0 = R_1 \times R_2$ ト
考ヘル)

$$\text{今、 } g(x) = n(x), \quad h(y) = n(y)$$

トオケバ (A) が成立スル。何者、

$$n-1 \leq f(x, y) < n$$

ナラバ

$$(x, y) \in \overline{E}_{n-1} = E'_{n-1} + E^2_{n-2}$$

トナリ、コレヨリ

$$x \in \text{Proj}_x(E'_{n-1}) \quad \text{or} \quad y \in \text{Proj}_y(E^2_{n-1})$$

脹ッテ

$$g(x) \geq n \quad \text{or} \quad h(y) \geq n$$

之レヨリ、明カニ

$$f(x, y) < g(x) + h(y)$$